c) Tracer (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et expliciter sa réciproque.

4°/ Soit $a \in \mathbf{R}^*$, M et N deux points de (C) d'abscisses respectives $-a$ et a.

a) Montrer que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.

b) Montrer que les tangentes à (C) en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

B) 1°/ Montrer que $\forall t \geq 0$, $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

2°/ En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et $\forall n \geq 1$,

$U_{n+1} = U_n(1 + \frac{1}{e^{n+1}})$

a) Prouver que $\forall n \geq 1, U_n > 0$.

b) Prouver que (U_n) est une suite croissante.

4°/a) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln(U_n) = \sum_{p=1}^{n} f(p)$.

b) Calculer en fonction de n les deux sommes $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{e^p}$ et $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{e^{2p}}$.

5°/a) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente. Soit l sa limite.

b) Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$.

Exercice 12 :

A) 1°/ Soit $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} : x \mapsto e^x - x - 1$.

Etudier les variations de u. En déduire que $\forall x > 0$, $e^x \geq x + 1$.